

Title	Dérivé-opération ニ依ル位相空間
Author(s)	松下, 眞一
Citation	全国紙上数学談話会. 2(5) p.98-p.103
Issue Date	1947-06-10
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75177
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

42. *Dérivé-operation* ニ依ル位相空間

松下 眞 — (九大)

コレヲヤッテキタ頃カラ既ニ二年モ経ッタ。終戦トナッテモ軍ナル紹介以上ノ報告ヲスル機会が無カッタノデ。コノ誌上ニ一応アル程度ノ詳シイ記述ヲヤッテ見タイト思フ。

ナホ、此ノ方面ノ研究ニツイテ、近藤基吉先生カラタマハッター方ナラヌ御指導ノ勞ヲ衷心ヨリ感謝致シマス。

(1)

先ツ問題ハ 点ノナイ位相空間ノ構成デアル。ソレニ対シテ *Kuratowski* ノ方法⁽¹⁾ヲ 更ニ代数化サレク寺阪教授ノ方法⁽²⁾ハ興味深ク且ツ美シイ理論デアル。——所謂 *Kuratowski*-寺阪ノ代数——

所テ夫等ハ *fermeture-operation* (*closure-operator*)ニ依ッテ構成サレタモノデアルガ ソノ代リニ *dérivé-operator*ヲ用ヒタナラバ、ドウナルカト云フト、*fermeture*ニ対入ル色々ノ関係ガ *dérivé*ノ中ニ美シク *modifier*サレルノミナラズ、*opération* $D(X)$ ト X^0 ト⁽³⁾ノ対応ガ 導集合ト 閉被ノ対応ノ直接ニ再現トシテ得ラレ、アル意味デノ並行性ガ考ヘラレルノデアル。

(2)

之ヲ *coole*代数トシ、單位-及ビ零-要素ヲ夫々 1 及ビ 0 デ、 $X \in \mathfrak{L}$ ノ *complément*ヲ X^c デアラハス。サテ ϕ ヲ ϕ 自身ニワッス *homomorphisum* ϕ デ 次ノ三條件ヲ満スモノヲ考ヘル； 即チ

$$\varphi_1 : \varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

$$\varphi_2 : \varphi(0) = 0$$

$$\varphi_3 : \varphi(\varphi(X)) < \varphi(X)$$

スルト容易=解ル如ク φ_1 ヨリ

$$\varphi_4 : X < Y \text{ ナラバ } \varphi(X) < \varphi(Y)$$

$$\varphi_4 \text{ ヨリ } \varphi_5 : \varphi(X \cdot Y) = (\varphi(X) \cdot \varphi(Y))$$

ガ得ラレル。次=順序数 α ニ対シテ $\varphi^{(\alpha)}(X)$ ヲ超限帰納法ニヨリ次ノヤウニ規定スル。

$$i) \quad \varphi^{(0)}(X) = X$$

$$ii) \quad \alpha \text{ ガ孤立数ナラバ } \varphi^{(\alpha)}(X) = \varphi(\varphi^{(\alpha-1)}(X))$$

$$iii) \quad \alpha \text{ ガ極限数ナラバ } \varphi^{(\alpha)}(X) = \prod_{\beta < \alpha} \varphi^{(\beta)}(X)$$

スルト明ラカ= $\alpha < \beta$ ナラバ $\varphi^{(\alpha)}(X) < \varphi^{(\beta)}(X)$

且ツ $\varphi^{(\alpha+\beta)}(X) = \varphi^{(\beta)}(\varphi^{(\alpha)}(X))$ デアル。

サテ簡單ノタメ $\varphi^{(\alpha)}(X) = X^{(\alpha)}$ ト置キ $X^{(1)} = X^d$ ト置ケバ 孤立数ニ対シテハ $X^{(\alpha)} = (X^{(\alpha-1)})^d$ デアル。 $X^{(\alpha)}$ ヲ X ノ α 次ノ *dérivé* ト呼ブコトニシ、特ニ一次ノ *dérivé* X^d ヲ 單 = X ノ *dérivé* ト呼ブコトニシヨウ。

次= $\nabla \in \mathcal{L}$ ニ対シテ

$$\alpha) \quad X < \nabla \equiv X = 0(\nabla)$$

$$\beta) \quad X \cdot \nabla^c = 0(\nabla) \Leftrightarrow X < \nabla(\nabla)$$

$$\gamma) \quad X < \nabla(\nabla) \quad \text{且ツ} \quad \nabla < X(\nabla) \Leftrightarrow X = \nabla(\nabla)$$

ト定義スレバ容易=解ル如ク

Lemme 1. $X < \nabla(\nabla)$ ナラバ $X^d < \nabla^d(\nabla^d)$ 及ビ

$X < \nabla^d(\nabla^d)$ ナラバ $X^d < \nabla^d(\nabla^d)$ デアル。

(3)

サテ 1ノ *adhérence* 即チ $1 \cdot I^{ac} = I^{ac}$ ヲ E ト置クコトニスレバ $E = X^{ac} \cdot X^{cd}$ ガ任意ノ $X \in \mathcal{L}$ ニ対シテ成立スル。スルト上ノ定義ヨリ蓋チ=

Lemme 2. $X^{ac} \subset X^{cd}(E) \quad X \in \mathcal{L}$

Lemme 3. i) $X^{dcd} \subset X^{cd}(E)$

ii) $X^{cdcd} \subset X^d(E^d)$

何者, i) ハ $X^{dcd} \subset X^{cdd}(E^d) \subset X^{cd}(E^d)$

ii) ハ i) = 於テ X ノ代リニ X^c ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2' $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}(E^d)$ ⁽⁵⁾

Lemme 4 $X^{dc} \subset X^{dcd}(E)$ 且ツ $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^d)$
 $\subset X^{(\beta)c(\alpha)}(E^d)$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5. $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明 ; $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^d) \subset X^{dc(\beta)}(E^d)$

逆ノ不等号ハ $X^{(\alpha)} \subset X^d \rightarrow X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \rightarrow X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}(E^d)$. 然ルニ $\beta = 1$ ノトキニハ

$E^d \subset X^{dcd}$ ダカラ $E^d \subset X^{(\alpha)c d}$ 故ニ $X^{(\alpha)c d} = X^{dcd}$ ガ成立ス

ル。依ッテ一般ノ β ニ對シテ然リ。 C. g. f. d

Théorème 1. $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明 ; i) $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^d) = X^{(\alpha\gamma)}(E^d) \subset X^{(\alpha)}(E^d)$

故ニ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$. (E^d) ハ Lemma 4 ノ

証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii) $(X^{(\alpha)c(\gamma)})(\delta)c \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)})(\delta)(E^d) \rightarrow X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c} \subset$
 $X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)cc}(E^d) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}(E^d)$

依ッテ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\beta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$ 但シ

コノ (E^d) モ省クコトヲ得ル。 i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル。 C, g, b, d

サテコノ Théorème = 於テ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ト置ケバ次ノ
 系ガ得ラレル。

Corollaire $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ關數ニ關スル C. Kuratowski ノ等式⁽⁶⁾ノ導集合ニ於ケル
 analogue デアル。

Lemme 3. i) $X^{dcd} \subset X^{cd}(E)$

ii) $X^{cdcd} \subset X^d(E^d)$

何者, i) ハ $X^{dcd} \subset X^{cdd}(E^d) \subset X^{cd}(E^d)$

ii) ハ i) = 於テ X ノ代リニ X^c ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2' $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}(E^d)$ ⁽⁵⁾

Lemme 4 $X^{dc} \subset X^{dcd}(E)$ 且ツ $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^d) \subset X^{(\beta)c(\alpha)}(E^d)$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5. $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明 ; $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^d) \subset X^{dc(\beta)}(E^d)$

逆ノ不等号ハ $X^{(\alpha)} \subset X^d \rightarrow X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \rightarrow X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}(E^d)$. 然ルニ $\beta = 1$ ノトキニハ

$E^d \subset X^{dcd}$ ダカラ $E^d \subset X^{(\alpha)c^d}$ 故ニ $X^{(\alpha)c^d} = X^{dcd}$ ガ成立ス

ル。依ッテ一般ノ β ニ對シテ然リ。 C. g. f. d

Théorème 1. $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明 ; i) $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^d) = X^{(\alpha\gamma)}(E^d) \subset X^{(\alpha)}(E^d)$

故ニ $X^{(\alpha)cc(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$. (E^d) ハ Lemma 4 ノ

証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii) $(X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c} \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)}(E^d) \rightarrow X^{(\alpha)c(\delta)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)cc}(E^d) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}(E^d)$

依ッテ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\beta)}(E^d) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^d)$ 但シ

コノ (E^d) モ省クコトヲ得ル。 i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル。 C, g, b, d

サテコノ Théorème = 於テ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ト置ケバ次ノ系ガ得ラレル。

Corollaire $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ關數ニ關スル C. Kuratowski ノ等式⁽⁶⁾ノ導集合ニ於ケル analogue デアル。

(4)

サテ $X + X^d = X^a$ ト置キ X^a ヲ X ノ閉被ト呼ブコトニスル。
明ラカニ *opération* X^a ハ (2) ニ於ケル \mathcal{Q} ノ條件ヲ満足スルノ
ミナラス

Lemme 6. $X^{aa} = X^a$ 且ツ $X^{da} = X^{ad} = X^d$
 $X \subset X^a$, $X^d \subset X^a$ ヨリ明ラカ。次ニ \mathcal{Q} ト d トノ關係トシテハ

Théorème 2. $X^{dcd} = X^{dca}(E^a) = X^{acd}(E^a) = X^{aca}(E^a)$

証明； 先ヅ $X^{dca} = X^{dc} + X^{dcd} = X^{dcd}(E) \dots \dots *$

次ニ $X^{dcd} \subset X^{cd}(E^d) \subset X^{ca}(E^d)$ (Lemma 4) 依ツテ $X^{dca} = (X^a)^{dcd} \subset$
 $\subset X^{acd}(E^d) \subset X^{aca}(E^d)$ 又他方ニテ $X^{aca} = (X^c X^{dc})^2 \subset$
 $\subset X^{dca} = X^{dcd}(E)$. 故ニ $X^{dcd} = X^{dca}(E^a) = X^{acd}(E^a) =$
 $X^{aca}(E^a)$

C. q. f. d.

Corollaire $X^{dcdcd} = \begin{Bmatrix} X^{acdcd} \\ X^{dcacd} \\ X^{acdca} \end{Bmatrix} (E^a) = \begin{Bmatrix} X^{dcaca} \\ X^{acdca} \\ X^{acacd} \end{Bmatrix} (E^a) = X^{acaca}(E^a)$

次ニ \mathcal{S}_n ナルモノヲ定義シ、ソレハ d ヨリ始マリ c 及ビ d ガ交互ニ
現ハレル有限列デアツテ、ソノ文字ノ総數ガ n ナルモノトスル。例ヘ
バ、 $\mathcal{S}_{2n} = dcdc \dots dc$ (dc ガ n 個), $\mathcal{S}_{2n+1} = dcdc \dots$
 dcd (dc ガ n 個トソノ後ニ d ガ 1 個)。又 $\mathcal{S}_n =$ 於テ d ノ代
リニ \mathcal{Q} ヲ置換ヘタモノヲ \mathcal{P}_n ト書ク事ニスル。

Théorème 3. $n \geq 3$ ナルトキ

i) 若シ n ガ奇數ナラバ $X^{\mathcal{S}_n} + E \cdot X^{\mathcal{P}_n} = X^{\mathcal{P}_n} + E^d$

ii) 若シ n ガ偶數ナラバ $X^{\mathcal{S}_n} + E^d \cdot X^{\mathcal{P}_n} = X^{\mathcal{P}_n} + E$

証明； 先ヅ Théorème 2 ノ系ヨリ一般ニ $X^{\mathcal{S}_n} = X^{\mathcal{P}_n}(E^a)$
ガ成立シテキル。若シ $n \geq 3$ ガ奇數ナラバ $X^{\mathcal{S}_n} = (X^{\mathcal{S}_{n-3}})^{dcd}$
ト書ケルカラ $E^d \subset X^{\mathcal{S}_n}$ 且ツ $E \cdot X^{\mathcal{S}_n} = 0$ 。依ツテ i) ノ等式
ガ得ラレタ。

又 n ガ偶數ナラバ (但シ $n \geq 3$)、 $E^d \cdot X^{\mathcal{S}_n} = 0$ 且ツ $E \subset X^{\mathcal{S}_n}$

デアル。故= ii)ヲ得ル。 C. g. f. d.

Théorème 4. 若シ $n=4r+1$ 又ハ $n=4r$ ナラバ $X^{(p)} \subset X^{\sigma_n}(E^a) \subset X^{(r)}(E^a)$ ガ成立スル。但シ β, γ ハ任意ノ有限ナル順序数。

Corollaire $X^{cdc} \subset X^{\sigma_n}(E^a) \subset X^d(E^a)$ 。但シ $n=4r+1$ 又ハ $n=4r$ デアル。

次= C. Kuratowski ノ得タ Table (T)⁽⁷⁾ = 相當スルモノトシカノニツノ Table ヲ掲ゲル。

【Table 1】:

$$X^{cdc} \subset X^{cdcdcdc}(E^a) \begin{cases} CX^{dcdc}(E^a) \\ CX^{cdcd}(E^a) \end{cases} \begin{cases} CX^{dcdc}(E^a) \\ CX^{cdcd}(E^a) \end{cases} CX^d(E^a)$$

【Table 2】

$$X^{dc} \subset X^{dcdcdc}(E^a) \begin{cases} CX^{cdcdc}(E^a) \\ CX^{dcd}(E^a) \end{cases} \begin{cases} CX^{cdcdc}(E^a) \\ CX^{dcd}(E^a) \end{cases} CX^d(E^a)$$

Table 2 ハ (3)ニ於ケル Lemma 2 ヲ詳細ニシタモノデアル。サテ之等ヲ証明シヨウ。

証明 ; 定理 4 = 依ル $X^{dcdcd} \subset X^d(E^a)$ ダカラ $(X^c)^{dc} \subset (X^c)^{dcdcdc}(E^a)$ 。次= $X^{cdcdcdc} \subset X^{cdcdcccd}(E) = X^{cdcd}(E) = X^{cdcd}(E)$ 即チ $X^{cdc} \subset X^{cdcdcdc}(E^a) \subset X^{cdcd}(E^a) \subset X^{dcdcd}(E^a) \subset X^d(E^a)$ ガ得ラレタ。又 $(X^{cdc})^{dcdc} \subset (X^d)^{dcdc}(E^a) \subset X^{dcdc}(E^a)$ 及ビ Lemma 2 ニヨリ $(X^{dc})^{dc} \subset (X^{dc})^{dcd}(E^a)$ 。即チ $X^{cdcdcdc} \subset X^{dcdc}(E^a) \subset X^{dcdcd}(E^a)$ ガ得ラレル。コレデ Table I ハ完成シタ。ソコデ $X \rightarrow X^c$ デ置換ヘルト Table 2 ガ得ラレル。 C. g. f. d.

(未完)

(註)

(1) C. Kuratowski : sur l'opération \bar{A} de l'Analyse Situs, Fund. Math. 3 (1922)

- C. Kuratowski ; *Topologie* [. (1933)
- (2) H. Terasaka ; *Die theorie der Topologischen Verbände*, *Fund. Math.* (1939)
- (3) H. Terasaka ; *loc. cit.*
- (4) 後述ノハズ, タトヘバ
H. Hahn ; *Reelle Funktionen*, (1932)
- (5) コノ章ヲ通シテ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ハ任意ノ順序数.
- (6) C. Kuratowski ; *loc. cit.*
- (7) C. Kuratowski ; *loc. cit.*

1947. 3. 16.
